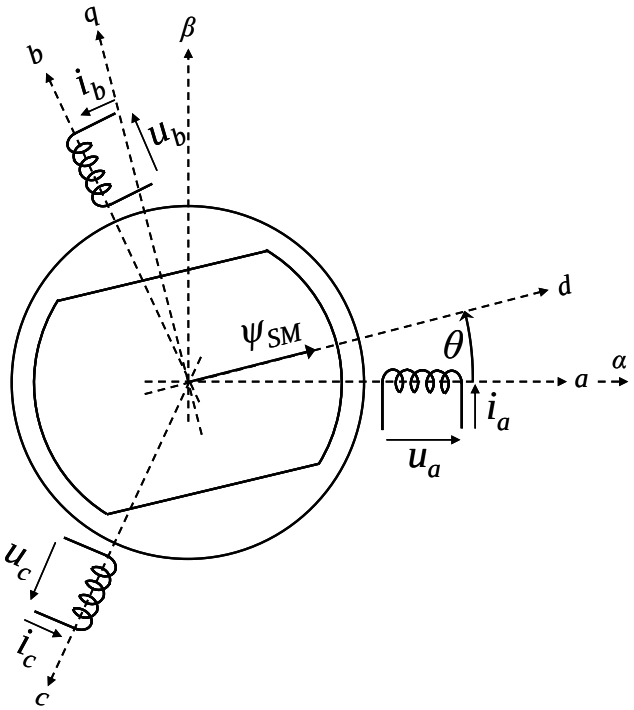
Модел синхроне машине са сталним магнетима

Слика 1 приказује положај стојећег *abc* координатног система, стојећег *αβ* координатног система и обртног *dq* координатног система у односу на положај намотаја на статору и положаја ротора. Флукс ψ_{SM} представља флукс сталних магнета на ротору обухваћен статорским намотајем.



Слика 1. Представа СМСМ са положајем *abc*, *αβ* и *dq* координатног система

Да би се дошло до матрице индуктивности, најпре су одређене магнетопобудне силе које развијају навоји машине и магнети на ротору у правцу одређене осе. Тако је магнетопобудна сила навоја *a* у правцу *d* осе:

$$F_{ad} = N_a \cdot i_a \cdot \cos\theta, \tag{1}$$

магнетопобудна сила навоја *a* у правцу *q* осе:

$$F_{aq} = N_a \cdot i_a \cdot cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -N_a \cdot i_a \cdot sin\,\theta, \tag{2}$$

магнетопобудна сила сталних магнета у правцу *a* осе:

$$F_{fa} = F_{SM} \cdot cos\,\theta \tag{3}$$

магнетопобудна сила сталних магнета у правцу *b* осе:

$$F_{fb} = F_{SM} \cdot cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \tag{4}$$

магнетопобудна сила сталних магнета у правцу *c* осе:

$$F_{fc} = F_{SM} \cdot cos(\theta + \frac{2\pi}{3}). \tag{5}$$

Флукс проузрокован магнетопобудном силом F_{ad} износи:

$$\phi_{ad} = \chi_d \cdot F_{ad}, \tag{6}$$

где је χ_d магнетна проводност дуж d осе. Слично се добија за флукс проузрокован магнетопобудном силом F_{aq}:

$$\phi_{aq} = \chi_q \cdot F_{aq}, \tag{7}$$

Флукс проузрокован сталним магнетима у правцу a осе износи:

$$\phi_{fa} = \phi_{SM} \cdot cos\,\theta, \tag{8}$$

где је ϕ_{SM} флукс сталних магнета дуж d осе. По b и c оси се добија:

$$\phi_{fb} = \phi_{SM} \cdot cos(\theta - \frac{2\pi}{3}), \tag{9}$$

$$\phi_{fc} = \phi_{SM} \cdot cos(\theta + \frac{2\pi}{3}). \tag{10}$$

Флуксни обухват навоја a проузрокован флуксом ϕ_{aa} гласи:

$$\begin{aligned}\psi_{aa} &= N_a \cdot \phi_{aa} = N_a \cdot (\phi_{ad} \cdot cos\,\theta + \phi_{aq} \cdot cos(\theta + \frac{\pi}{2})) = N_a \cdot (\phi_{ad} \cdot cos\,\theta - \phi_{aq} \cdot sin\,\theta) = \\ &= N_a^2 \cdot i_a \cdot (\chi_d \cdot cos^2\theta + \chi_q \cdot sin^2\theta) = N_a^2 \cdot i_a \cdot (\frac{\chi_d + \chi_q}{2} + \frac{\chi_d - \chi_q}{2} \cdot cos\,2\theta)\end{aligned} \tag{11}$$

Слично се добија и флуксни обухват навоја b проузрокован флуксом ϕ_{ab}:

$$\begin{aligned}\psi_{ab} &= N_a \cdot \phi_{ab} = N_b \cdot (\phi_{ad} \cdot cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) - \phi_{aq} \cdot sin(\theta - \frac{2\pi}{3})) = \\ &= N_a \cdot N_b \cdot i_a \cdot (-\frac{1}{2}\frac{\chi_d + \chi_q}{2} + \frac{\chi_d - \chi_q}{2} \cdot cos(2\theta - \frac{2\pi}{3}))\end{aligned} \tag{12}$$

Флуксни обухват навоја a проузрокован флуксом сталних магнета ψ_{SM} износи:

$$\psi_{fa} = \psi_{SM} \cdot cos\,\theta. \tag{13}$$

Према изразима (9) и (10) на сличан начин се могу добити и флуксни обухвати по b и c оси. У изразима (11) и (12) делови у заградама који су одређени геометријом склопа и магнатном проводношћу одређују међуиндуктивности између одређених навоја. Приказани у облику матрице међуиндуктивности у стојећем abc координатном систему гласе:

$$\underline{L}_{abc}=\begin{bmatrix} \frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos\,2\theta & -\frac{1}{2}\frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos(2\theta-\frac{2\pi}{3}) & -\frac{1}{2}\frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos(2\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ -\frac{1}{2}\frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos(2\theta-\frac{2\pi}{3}) & \frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos(2\theta-\frac{2\pi}{3}) & -\frac{1}{2}\frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos\,2\theta \\ -\frac{1}{2}\frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos(2\theta+\frac{2\pi}{3}) & -\frac{1}{2}\frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos\,2\theta & \frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cdot cos(2\theta+\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Једначина напонске равнотеже за статорски намотај у стационарном *abc* координатном систему у матричном облику гласи:

[abc:]

$$\underline{u}_{abc}=\underline{R}_{abc}\cdot\underline{i}_{abc}+\frac{d}{dt}(\underline{L}_{abc}\cdot\underline{i}_{abc})+\frac{d}{dt}(\underline{\psi}_{fabc}) \tag{15}$$

где је $\underline{R}_{abc}$ дијагонална матрица отпорности статорских навоја:

$$\underline{R}_{abc}=\begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \tag{16}$$

Да би се прешло у двофазну представу склопа, тј. представу у стојећем $\alpha\beta$ координатном систему, потребно је применити C и C^{-1} матрице пресликавања дефинисане на начин:

$$\underline{x}_{abc}=\underline{C}\cdot\underline{x}_{\alpha\beta};\qquad C=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\underline{x}_{\alpha\beta}=\underline{C}^{-1}\cdot\underline{x}_{abc};\qquad C^{-1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Њиховом применом модел машине у *abc* координатном систему (15) се пресликава у модел у стојећем $\alpha\beta$ координатном систему на начин:

[αβ:]

$$\begin{aligned}\underline{u}_{\alpha\beta}&=\underline{C}^{-1}\cdot\underline{R}_{abc}\cdot\underline{C}\cdot\underline{i}_{\alpha\beta}+\frac{d}{dt}(\underline{C}^{-1}\cdot\underline{L}_{abc}\cdot\underline{C}\cdot\underline{i}_{\alpha\beta})+\frac{d}{dt}(\underline{C}^{-1}\cdot\underline{\psi}_{fabc})=\\ &=\underline{R}_{\alpha\beta}\cdot\underline{i}_{\alpha\beta}+\frac{d}{dt}(\underline{L}_{\alpha\beta}\cdot\underline{i}_{\alpha\beta})+\frac{d}{dt}(\underline{\psi}_{f\alpha\beta})\end{aligned} \tag{19}$$

где су одговарајуће матрице параметара одређене са:

$$\underline{R}_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_S \end{bmatrix}; \qquad \underline{L}_{\alpha\beta}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} \frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cos 2\theta & \frac{L_d-L_q}{2}\sin 2\theta \\ \frac{L_d-L_q}{2}\sin 2\theta & \frac{L_d+L_q}{2}+\frac{L_d-L_q}{2}\cos 2\theta \end{bmatrix};$$

$$\underline{\psi}_{f\alpha\beta}=\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}\cdot\psi_{SM} \tag{20}$$

Пресликавање из стојећег $\alpha\beta$ координатног система у обртни dq координатни систем омогућују матрице пресликавања D и D^{-1} дефинисане на начин:

$$\underline{x}_{\alpha\beta}=\underline{D}\cdot\underline{x}_{dq}; \qquad \underline{D}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\underline{x}_{dq}=\underline{D}^{-1}\cdot\underline{x}_{\alpha\beta}; \qquad \underline{D}^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{22}$$

Применом ових матрица склоп описан једначином (19) се из стојећег $\alpha\beta$ координатног система пресликава у $\underline{L}_{abc}=\underline{C}\cdot\underline{L}_{\alpha\beta}\cdot\underline{C}^{-1}$ према изразу (23).

[dq:]

$$\begin{aligned} \underline{u}_{dq} &= \underline{D}^{-1}\cdot\underline{R}_{\alpha\beta}\cdot\underline{D}\cdot\underline{i}_{dq}+\underline{D}^{-1}\cdot\frac{d}{dt}(\underline{D}\cdot\underline{D}^{-1}\cdot\underline{L}_{\alpha\beta}\cdot\underline{D}\cdot\underline{i}_{dq})+\underline{D}^{-1}\cdot\frac{d}{dt}(\underline{\psi}_{f\alpha\beta})= \\ &= \underline{R}_{dq}\cdot\underline{i}_{dq}+\underline{D}^{-1}\cdot\frac{d}{dt}(\underline{D})\cdot(\underline{L}_{dq}\cdot\underline{i}_{dq})+\frac{d}{dt}(\underline{L}_{dq}\cdot\underline{i}_{dq})+\underline{e}_{dq} \end{aligned} \tag{23}$$

где је $\underline{e}_{dq}$ вектор електромоторне силе индуковане кретањем сталних магнета на ротору. Матрице параметара у (23) износе:

$$\underline{R}_{dq}=\begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_S \end{bmatrix}; \quad \underline{L}_{dq}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_{dq}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\omega\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\psi_{SM}; \quad \underline{\psi}_{fdq}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\psi_{SM} \tag{24}$$

а члан $\underline{D}^{-1}\cdot\frac{d}{dt}(\underline{D})$ је једнак:

$$\underline{D}^{-1}\cdot\frac{d}{dt}(\underline{D})=\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

где је $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ угаона брзина обртања ротора, односно dq координатног система. Ако се параметари машине изразе преко њихових пофазних вредности, односно вредности које би одговарале двофазној представи машине, које износе:

$$R_S'=R_S;\ L_d'=\frac{3}{2}\cdot L_d;\ L_q'=\frac{3}{2}\cdot L_q;\ \psi_{SM}'=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\psi_{SM} \tag{26}$$

тада модел (23) добија облика:

[dq:]

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_S & 0 \\ 0 & R'_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -X_q' \\ X_d' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d' & 0 \\ 0 & L_q' \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \cdot \psi_{SM}' \end{bmatrix}. \tag{27}$$

У извођењу израза за електромагнетни момент m_c поћи ћемо од једначине (28) у стојећем *abc* домену.

[abc:]

$$m_c = \frac{P}{2}\left(\underline{i}_{abc}^T \cdot \frac{d\underline{\psi}_{abc}}{d\theta} - \frac{d\underline{i}_{abc}^T}{d\theta} \cdot \underline{\psi}_{abc}\right). \tag{28}$$

Вектор флуксног обухвата статора $\underline{\psi}_{abc}$ чине следећи чланови:

$$\underline{\psi}_{abc} = \underline{L}_{abc} \cdot \underline{i}_{abc} + \underline{\psi}_{fabc}. \tag{29}$$

Увршћавањем (29) у (28) и сматрајући да је матрица индуктивности $\underline{L}_{abc}$ симетрична, добија се израз за момент преко величина датих у *abc* домену:

$$m_c = \frac{P}{2}\left(\underline{i}_{abc}^T \cdot \frac{d\underline{L}_{abc}}{d\theta} \cdot \underline{i}_{abc} + \underline{i}_{abc}^T \cdot \frac{d\underline{\psi}_{fabc}}{d\theta} - \frac{d\underline{i}_{abc}^T}{d\theta} \cdot \underline{\psi}_{fabc}\right). \tag{30}$$

Да би се прешло на величине изражене у $\alpha\beta$ домену потребно је применити матрицу пресликавања $\underline{C}$, тј. израз (17) и $\underline{L}_{abc} = \underline{C} \cdot \underline{L}_{\alpha\beta} \cdot \underline{C}^{-1}$:

$$m_c = \frac{P}{2}\left\{(\underline{C} \cdot \underline{i}_{\alpha\beta})^T \cdot \frac{d}{d\theta}(\underline{C} \cdot \underline{L}_{\alpha\beta} \cdot \underline{C}^{-1}) \cdot \underline{C} \cdot \underline{i}_{\alpha\beta} + (\underline{C} \cdot \underline{i}_{\alpha\beta})^T \cdot \frac{d}{d\theta}(\underline{C} \cdot \underline{\psi}_{f\alpha\beta}) - \frac{d}{d\theta}(\underline{C} \cdot \underline{i}_{\alpha\beta})^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\psi}_{f\alpha\beta}\right). \tag{31}$$

Како је $\frac{d\underline{C}}{d\theta} = 0$, $(\underline{C} \cdot \underline{x}_{\alpha\beta})^T = \underline{x}_{\alpha\beta}^T \cdot \underline{C}^T$ и $\underline{C}^T = \underline{C}^{-1}$ из претходног се добија израз за момент који користи величине изражене у $\alpha\beta$ координатном систему:

[αβ:]

$$m_c = \frac{P}{2}\left(\underline{i}_{\alpha\beta}^T \cdot \frac{d\underline{L}_{\alpha\beta}}{d\theta} \cdot \underline{i}_{\alpha\beta} + \underline{i}_{\alpha\beta}^T \cdot \frac{d\underline{\psi}_{f\alpha\beta}}{d\theta} - \frac{d\underline{i}_{\alpha\beta}^T}{d\theta} \cdot \underline{\psi}_{f\alpha\beta}\right). \tag{32}$$

Пошто се ради о превођењу из трофазне представе на двофазну, обе у стојећем координатном систему, и за очекивати је било до по свом облику израз (32) одговара (30). У наредном кораку момент ће бити дат преко величина у обртном *dq* координатном систему. Потребно је применити пресликавање из $\alpha\beta$ простора у *dq* простор (21). Узимајући да је $\underline{L}_{\alpha\beta} = \underline{D} \cdot \underline{L}_{dq} \cdot \underline{D}^{-1}$ добија се да (32) прелази у:

$$m_c = \frac{P}{2}\left\{(\underline{D} \cdot \underline{i}_{dq})^T \cdot \frac{d}{d\theta}(\underline{D} \cdot \underline{L}_{dq} \cdot \underline{D}^{-1}) \cdot \underline{D} \cdot \underline{i}_{dq} + (\underline{D} \cdot \underline{i}_{dq})^T \cdot \frac{d}{d\theta}(\underline{D} \cdot \underline{\psi}_{fdq}) - \frac{d}{d\theta}(\underline{D} \cdot \underline{i}_{dq})^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\psi}_{fdq}\right). \tag{33}$$

одакле се развијањем добија:

$$m_c = \frac{P}{2}\{\underline{i}_{dq}^T \cdot \underline{D}^T \cdot (\frac{d\underline{D}}{d\theta} \cdot \underline{L}_{dq}\underline{D}^{-1} + \underline{D} \cdot \frac{d\underline{L}_{dq}}{d\theta} \cdot \underline{D}^{-1} + \underline{D} \cdot \underline{L}_{dq} \cdot \frac{d\underline{D}^{-1}}{d\theta}) \cdot (\underline{D} \cdot \underline{i}_{dq}) + \\ + \underline{i}_{dq}^T \cdot \underline{D}^T \cdot (\frac{d\underline{D}}{d\theta} \cdot \underline{\psi}_{fdq} + \underline{D} \cdot \frac{d\underline{\psi}_{fdq}}{d\theta}) - (\frac{d\underline{i}_{dq}^T}{d\theta} \cdot \underline{D}^T + \underline{i}_{dq}^T \cdot \frac{d\underline{D}^T}{d\theta}) \cdot \underline{D} \cdot \underline{\psi}_{fdq}\} \tag{34}$$

где је уважено да је $(\underline{D} \cdot \underline{x}_{dq})^T = \underline{x}_{dq}^T \cdot \underline{D}^T$. Како у dq координатном систему величине у колу и параметри склопа више нису зависни од угла ротора θ, пошто су изражени у координатном систему везаном за њега, следи да је: $\frac{d\underline{i}_{dq}}{d\theta} = 0$, $\frac{d\underline{\psi}_{fdq}}{d\theta} = 0$ и $\frac{d\underline{L}_{dq}}{d\theta} = 0$. Такође за матрицу трансформације $\underline{D}$ важи да је $\underline{D}^T = \underline{D}^{-1}$ па је израз (34) једнак следећем:

$$m_c = \frac{P}{2}\{\underline{i}_{dq}^T \cdot \underline{D}^T \cdot \frac{d\underline{D}}{d\theta} \cdot \underline{L}_{dq} \cdot \underline{i}_{dq} + \underline{i}_{dq}^T \cdot \underline{L}_{dq} \cdot \frac{d\underline{D}^{-1}}{d\theta} \cdot \underline{D} \cdot \underline{i}_{dq} + \\ + \underline{i}_{dq}^T \cdot \underline{D}^T \cdot \frac{d\underline{D}}{d\theta} \cdot \underline{\psi}_{fdq} - \underline{i}_{dq}^T \cdot \frac{d\underline{D}^T}{d\theta} \cdot \underline{D} \cdot \underline{\psi}_{fdq}\} \tag{35}$$

Користећи (24) и следећих једнакости:

$$\underline{D}^{-1} \cdot \frac{d\underline{D}}{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\underline{D}^{-1}}{d\theta} \cdot \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

коначно се за електромагнетни момент m_c, изражен у dq координатном систему, добија:

[dq:]

$$m_c = P \cdot \{i_d \cdot i_q \cdot (L_d - L_q) + i_q \cdot \psi_{SM}\}. \tag{36}$$

Потпун модел синхроне машине са сталним магнетима и моторским смером снага изражен у скаларном облику у dq координатном систему гласи:

[dq:]

$$L_d \cdot \frac{di_d}{dt} = -R_S \cdot i_d + L_q \cdot \omega \cdot i_q + u_d \tag{1}$$

$$L_q \cdot \frac{di_q}{dt} = -R_S \cdot i_q - L_d \cdot \omega \cdot i_d - e_q + u_q, \qquad e_q = \psi_{SM} \cdot \omega \tag{2}$$

$$m_{el} = P \cdot (\psi_{SM} \cdot i_q + (L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q) \tag{3}$$

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = m_c - m_{meh} \tag{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{5}$$

У поступку превођења модела у представу са електричним, магнетним и механичким величинама израженим у релативним јединицама користиће се следеће основне базне вредности:

$$U_B = U_{LN}\,,\ I_B = \sqrt{3}\cdot I_N\,,\ \omega_B = \omega_N$$

где су U_{LN} називни линијски напон машине, I_N називна струја и ω_N називна електрична угаона брзина. На основу њих добијају се изведене базне врдности импедансе, флуксног обухвата и момента:

$$Z_B = \frac{U_B}{I_B}\,,\ \ \psi_B = \frac{U_B}{\omega_B}\,,\ \ M_B = P\cdot\frac{U_B\cdot I_B}{\omega_B}\,.$$

Сведена у релативне јединице представа машине добија следећи облик:

$$\tau_d\cdot\frac{di_d}{dt} = -r_S\cdot i_d + x_q\cdot n\cdot i_q + u_d \tag{6}$$

$$\tau_q\cdot\frac{di_q}{dt} = -r_S\cdot i_q - x_d\cdot n\cdot i_d - u_{EMS} + u_q\,,\qquad u_{EMS} = \psi_{SM}\cdot n \tag{7}$$

$$m_{el} = \psi_{SM}\cdot i_q + (x_d - x_q)\cdot i_d\cdot i_q \tag{8}$$

$$\tau_{meh}\cdot\frac{dn}{dt} = m_{el} - m_{meh} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\omega_B}\frac{d\theta}{dt} = n \tag{10}$$

За напоне, струје статора и електромагнетни и момент оптерећења задржане су претходне ознаке, док је са n означена сведена електрична угаона брзина ротора. Овде особине машине описују τ_d период реактансе по подужној и τ_q попречној оси, r_S сведена отпорност статорског намотаја, сведене реактансе x_d и x_q, сведени флукс сталних магнета ψ_{SM}, механичка временска константа τ_{meh}. Угаони положај ротора остаје изражен у апсолутним јединицама. Сведене особине машине добијају се на следећи начин:

$$r_S = \frac{R_S}{Z_B}\,,\ \tau_d = \frac{L_d}{Z_B}\,,\ \tau_q = \frac{L_q}{Z_B}\,,\ x_d = \frac{\omega_B\cdot L_d}{Z_B}\,,\ x_q = \frac{\omega_B\cdot L_q}{Z_B}\,,\ \psi_{SM} = \frac{\omega_B\cdot\Psi_{SM}}{U_B}\,,\ \tau_{meh} = \frac{\omega_B\cdot J}{P\cdot M_B}\,.$$